CHƯƠNG I: HÀM BIẾN SỐ PHỨC

PHẦN GIỚI THIỆU

Giải tích phức là một bộ phận của toán học hiện đại có nhiều ứng dụng trong kỹ thuật. Nhiều hiện tượng vật lý và tự nhiên đòi hỏi phải sử dụng số phức mới mô tả được. Trong chương này chúng ta tìm hiểu những vấn đề cơ bản của giải tích phức: Lân cận, giới hạn, hàm phức liên tục, giải tích, tích phân phức, chuỗi số phức, chuỗi lũy thừa, chuỗi Laurent… Để nghiên cứu các vấn đề này chúng ta thường liên hệ với những kết quả ta đã đạt được đối với hàm biến thực. Mỗi hàm biến phức $w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ tương ứng với hai hàm thực hai biến $u(x,y)$, $v(x,y)$. Hàm phức $f(z)$ liên tục khi và chỉ khi $u(x,y)$, $v(x,y)$ liên tục. $f(z)$ khả vi khi và chỉ khi $u(x,y)$, $v(x,y)$ có đạo hàm riêng cấp 1 thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann. Tích phân phức tương ứng với hai tích phân đường loại 2 …Mỗi chuỗi số phức tương ứng với hai chuỗi số thực có số hạng tổng quát là phần thực và phần ảo của số hạng tổng quát của chuỗi số phức đã cho. Sự hội tụ hay phân kỳ được xác định bởi sự hội tụ hay phân kỳ của hai chuỗi số thực này.

Từ những tính chất đặc thù của hàm biến phức chúng ta có các công thức tích phân Cauchy. Đó là công thức liên hệ giữa giá trị của hàm phức tại một điểm với tích phân dọc theo đường cong kín bao quanh điểm này. Trên cơ sở công thức tích phân Cauchy ta có thể chứng minh được các kết quả: Mọi hàm phức giải tích thì có đạo hàm mọi cấp, có thể khai triển hàm phức giải tích thành chuỗi Taylor, hàm giải tích trong hình vành khăn được khai triển thành chuỗi Laurent.

Bằng cách tính thặng dự của hàm số tại điểm bất thường cô lập ta có thể áp dụng để tính các tích phân phức và tích phân thực, tính các hệ số trong khai triển Laurent và phép biến đổi Z ngược.

Dựa vào tính duy nhất của khai triển Laurent ta có thể xây dựng phép biến đổi Z.Phép biến đổi Z cho phép biểu diễn dãy tín hiệu số rời rạc bằng hàm giải tích.

Để học tốt chương này học viên cần xem lại các kết quả của giải tích thực.

NỘI DUNG

1.1. SỐ PHỨC

1.1.1. Dạng tổng quát của số phức

Số phức có dạng tổng quát $z = x + iy$, trong đó x, y là các số thực; $i^2 = -1$.

x là phần thực của z, ký hiệu $\operatorname{Re} z$. y là phần ảo của z, ký hiệu $\operatorname{Im} z$.

Khi $y = 0$ thì $z = x$ là số thực; khi $x = 0$ thì $z = iy$ gọi là số thuần ảo.

Số phức $x - iy$, ký hiệu $\overline{z}$, được gọi là số phức liên hợp với số phức $z = x + iy$.

Hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ bằng nhau khi và chỉ khi phần thực và phần ảo của chúng bằng nhau.

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2;\quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Tập hợp tất cả các số phức ký hiệu $\mathbb{C}$.

1.1.2. Các phép toán

Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$, ta định nghĩa:

a) Phép cộng: Số phức $z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ được gọi là tổng của hai số phức z_1 và z_2, ký hiệu $z = z_1 + z_2$.

b) Phép trừ: Ta gọi số phức $-z = -x - iy$ là số phức đối của $z = x + iy$.

Số phức $z = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ được gọi là hiệu của hai số phức z_1 và z_2, ký hiệu $z = z_1 - z_2$.

c) Phép nhân: Tích của hai số phức z_1 và z_2 là số phức được ký hiệu và định nghĩa bởi biểu thức:

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \tag{1.2}$$

d) Phép chia: Nghịch đảo của số phức $z = x + iy \neq 0$ là số phức ký hiệu $\frac{1}{z}$ hay z^{-1}, thỏa mãn điều kiện $zz^{-1} = 1$. Vậy nếu $z^{-1} = x' + iy'$ thì

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ yx' + xy' = 0 \end{cases} \Rightarrow x' = \frac{x}{x^2 + y^2},\ y' = \frac{-y}{x^2 + y^2}. \tag{1.3}$$

Số phức $z = z_1 z_2^{-1} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ được gọi là thương của hai số phức z_1 và z_2, ký hiệu $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$).

Ví dụ 1.1: Cho $z = x + iy$, tính z^2, $z\bar{z}$.

Giải: $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$, $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Ví dụ 1.2: Tìm các số thực x, y là nghiệm của phương trình

$$5(x + y)(1 + i) - (x + 2i)(3 + i) = 3 - 11i.$$

Giải: Khai triển và đồng nhất phần thực, phần ảo hai vế ta được

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2 = 3 \\ 4x + 5y - 6 = -11 \end{cases} \Rightarrow x = -3,\ y = \frac{7}{5}.$$

Ví dụ 1.3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} z + iw = 1 \\ 2z + w = 1 + i \end{cases}$.

Giải: Nhân i vào phương trình thứ nhất và cộng vào phương trình thứ hai ta được

$$(2+i)z = 1+2i \;\Rightarrow\; z = \frac{1+2i}{2+i} = \frac{(1+2i)(2-i)}{5} = \frac{4+3i}{5},$$

$$\Rightarrow\; w = i(z-1) = i\left(\frac{-1+3i}{5}\right) = -\frac{3+i}{5}.$$

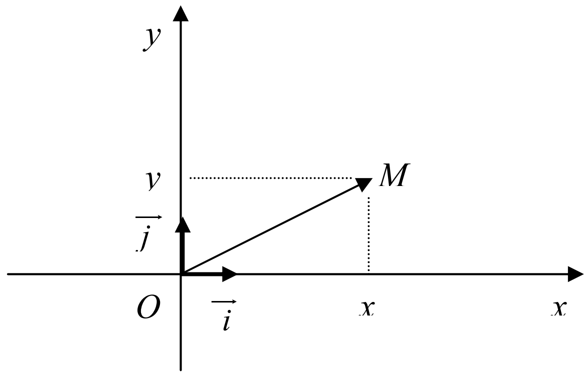
Ví dụ 1.4: Giải phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Giải: $z^2 + 2z + 5 = (z+1)^2 + 4 = (z+1)^2 - (2i)^2 = (z+1-2i)(z+1+2i)$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = -1 - 2i$.

1.1.3. Biểu diễn hình học của số phức, mặt phẳng phức

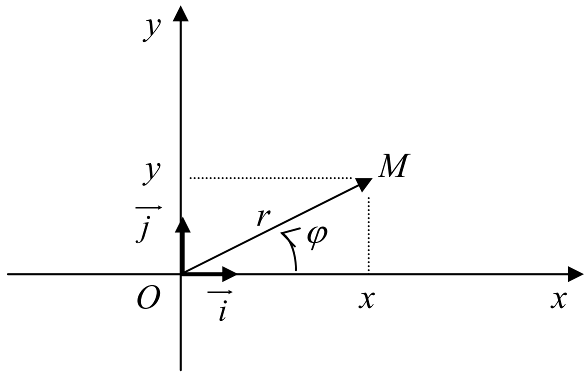
Xét mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, có véc tơ đơn vị trên hai trục tương ứng là $\vec{i}$ và $\vec{j}$. Mỗi điểm M trong mặt phẳng này hoàn toàn được xác định bởi tọa độ $(x; y)$ của nó thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Số phức $z = x + iy$ cũng hoàn toàn được xác định bởi phần thực x và phần ảo y của nó. Vì vậy người ta đồng nhất mỗi điểm có tọa độ $(x; y)$ với số phức $z = x + iy$, lúc đó mặt phẳng này được gọi là mặt phẳng phức.

1.1.4. Dạng lượng giác của số phức

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, nếu ta chọn $\overrightarrow{Ox}$ làm trục cực thì điểm $M(x; y)$ có tọa độ cực $(r; \varphi)$ xác định bởi $r = OM$, $\varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$



thỏa mãn $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Ta ký hiệu và gọi

$$|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.4}$$

$$\text{Arg}z = \varphi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.5}$$

là *mô đun và argument của số phức* $z = x + iy$.

Góc φ của số phức $z = x + iy \neq 0$ được xác định theo công thức sau

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = y/x \\ \cos\varphi = x/\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \tag{1.6}$$

Giá trị của Argz nằm giữa $-\pi$ và π được gọi là *argument chính*, ký hiệu $\arg z$. Vậy

$$-\pi < \arg z \leq \pi .$$

Từ công thức (1.4) ta có

$$z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \tag{1.7}$$

gọi là *dạng lượng giác của số phức*.

Sử dụng khai triển Maclaurin có thể chứng minh được *công thức Euler*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1.8}$$

Do đó $$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{1.9}$$

Từ (1.7)-(1.8) ta có thể viết *số phức dưới dạng mũ*

$$z = |z| e^{i\varphi} \tag{1.10}$$

Các tính chất của số phức

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. **(1.11)**

- $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$. **(1.12)**

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg z_1 = \arg z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + k2\pi \end{cases}$ **(1.13)**

- $z\overline{z} = |z|^2$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$. **(1.14)**

- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. **(1.15)**

- $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$, $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$ **(1.16)**

- $z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq |z| \\ |y| \leq |z| \end{cases}$ và $|z| \leq |x| + |y|$ **(1.17)**

Ví dụ 1.5: a) Tập các số phức z thỏa mãn $|z-2|=3$ tương ứng với tập các điểm có khoảng cách đến $I(2;0)$ bằng 3, tập hợp này là đường tròn tâm I bán kính 3.

b) Tập các số phức z thỏa mãn $|z-2|=|z+4|$ tương ứng với tập các điểm cách đều $A(2;0)$ và $B(-4;0)$ đó là đường trung trực của đoạn AB có phương trình $x=-1$.

1.1.5. Phép nâng lũy thừa, công thức Moivre

Lũy thừa bậc n của số phức z là số phức $z^n = \underbrace{zz\cdots z}_{n \text{ lần}}$

Từ công thức (1.15)-(1.16) ta có *công thức Moivre:*

$$z^n = |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right), \quad \operatorname{Arg} z = \varphi + k2\pi . \qquad \textbf{(1.18)}$$

Đặc biệt, khi $|z|=1$ ta có

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) \qquad \textbf{(1.18)'}$$

Ví dụ 1.6: Tính $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}$.

Giải: $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right)$

$$= 2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2^9 + i\sqrt{3}2^9 .$$

1.1.6. Phép khai căn

Số phức ω được gọi là căn bậc n của z, ký hiệu $\omega = \sqrt[n]{z}$, nếu $\omega^n = z$.

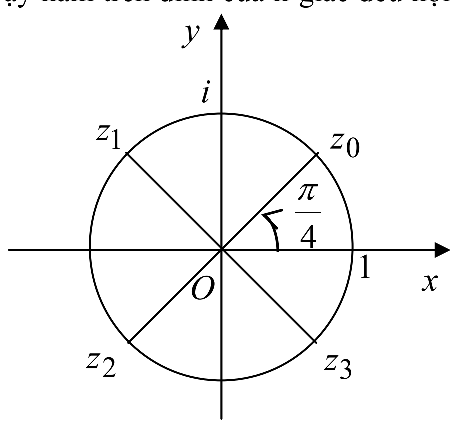
Nếu viết dưới dạng lượng giác: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ thì

$$z = \omega^n \iff \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \varphi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi + k2\pi}{n} \cdot \end{cases} \qquad \textbf{(1.19)}$$

Vì Argument của một số phức xác định sai khác một bội số nguyên của 2π nên với mỗi số phức $z \neq 0$ có đúng n căn bậc n. Các căn bậc n này có cùng mô đun là $\sqrt[n]{r}$, Argument nhận các giá trị $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n}$ ứng với $k = 0, 1, ..., n-1$, vì vậy nằm trên đỉnh của n-giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính $\sqrt[n]{r}$.

Ví dụ 1.7: Giải phương trình $z^4 + 1 = 0$

Giải: Nghiệm của phương trình là căn bậc 4 của $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ tương ứng là:

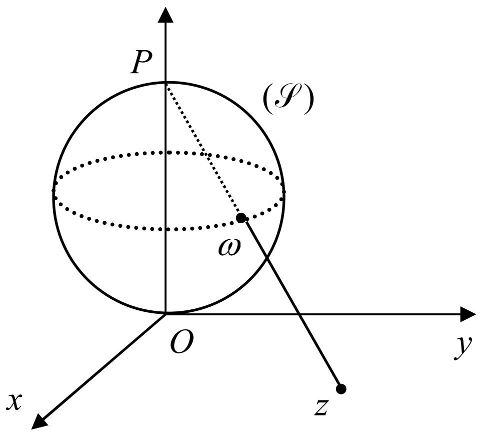


$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

$$z_1 = iz_0 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},$$

$$z_2 = -z_0 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}},$$

$$z_3 = -iz_0 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$



1.1.7. Các khái niệm cơ bản của giải tích phức

1.1.7.1. Mặt cầu phức

Trong 1.1.3 ta đã có một biểu diễn hình học của tập các số phức $\mathbb{C}$ bằng cách đồng nhất mỗi số phức $z = x + iy$ với điểm M có tọa độ $(x; y)$ trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Mặt khác nếu ta dựng mặt cầu $(\mathscr{S})$ có cực nam tiếp xúc với mặt phẳng Oxy tại O, khi đó mỗi điểm z thuộc mặt phẳng Oxy sẽ tương ứng duy nhất với điểm ω là giao điểm của tia Pz và mặt cầu $(\mathscr{S})$, P là điểm cực bắc của $(\mathscr{S})$.

Vậy mỗi điểm trên mặt phẳng Oxy được xác định bởi một điểm trên mặt cầu $(\mathscr{S})$ ngoại trừ điểm cực bắc P.

Ta gán cho điểm cực bắc này số phức vô cùng ∞. Tập hợp số phức $\mathbb{C}$ thêm số phức vô cùng được gọi là tập số phức mở rộng $\overline{\mathbb{C}}$. Như vậy toàn bộ mặt cầu $(\mathscr{S})$ là một biểu diễn hình học của tập số phức mở rộng.

Quy ước: $\frac{z}{0} = \infty \ (z \neq 0)$, $z\infty = \infty \ (z \neq 0)$, $z + \infty = \infty$, $\infty - z = \infty$.

1.1.7.2. Lân cận, miền

a. Lân cận

Khái niệm $\varepsilon -$ lân cận của $z_0 \in \mathbb{C}$ được định nghĩa hoàn toàn tương tự với $\varepsilon -$ lân cận trong $\mathbb{R}^2$, đó là hình tròn có tâm tại điểm này và bán kính bằng ε.

$$B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\} \quad \textbf{(1.23)}$$

$N -$ lân cận $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$: $\quad B_N(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > N\} \cup \{\infty\}$ **(1.23)'**

b. Điểm trong, tập mở

Giả sử E là một tập các điểm của mặt phẳng phức hoặc mặt cầu phức. Điểm z_0 được gọi là *điểm trong* của E nếu tồn tại một lân cận của z_0 nằm hoàn toàn trong E.

Tập chỉ gồm các điểm trong được gọi là *tập mở.*

c. Điểm biên

Điểm z_1, có thể thuộc hoặc không thuộc E, được gọi là *điểm biên* của E nếu mọi lân cận của z_1 đều có chứa các điểm thuộc E và các điểm không thuộc E.

Tập hợp các điểm biên của E được gọi là biên E, ký hiệu ∂E.

Hình tròn mở $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ và phần bù của hình tròn mở $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$ là các tập mở có biên lần lượt là $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ và $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\} \cup \{\infty\}$.

Hình tròn đóng $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \le r\}$ không phải là tập mở vì các điểm biên $|z - z_0| = r$ không phải là điểm trong.

d. Tập liên thông, miền

Tập con D của mặt phẳng phức hay mặt cầu phức được gọi là *tập liên thông* nếu với bất kỳ 2 điểm nào của D cũng có thể nối chúng bằng một đường cong liên tục nằm hoàn toàn trong D.

Một tập mở và liên thông được *gọi là miền*.

Miền D cùng biên ∂D của nó được gọi là miền đóng, ký hiệu $\overline{D} = D \cup \partial D$. Miền chỉ có một biên được gọi là *miền đơn liên*, trường hợp ngược lại gọi là *miền đa liên*.

Ta qui ước *hướng dương trên biên của miền* là hướng mà khi ta đi trên biên theo hướng đó thì miền D ở bên tay trái.

Miền D được gọi là bị chặn nếu tồn tại $R > 0$ sao cho $|z| \le R$, $\forall z \in D$.

1.2. HÀM BIẾN PHỨC

1.2.1. Định nghĩa hàm biến phức

Định nghĩa 1.1: *Một hàm biến phức xác định trên tập con D của $\mathbb{C}$ hoặc $\overline{\mathbb{C}}$ là một quy luật cho tương ứng mỗi số phức $z \in D$ với một hoặc nhiều số phức w, ký hiệu $w = f(z), z \in D$.*

Nếu với mỗi z chỉ cho tương ứng duy nhất một giá trị w thì $f(z)$ được gọi là hàm đơn trị. Trường hợp ngược lại f được gọi là hàm đa trị.

Hàm số $w = f(z) = z^2 + 3$ là một hàm đơn trị, còn hàm số $w = f(z) = \sqrt{z}$ là một hàm đa trị.

Tập D trong định nghĩa trên được gọi là tập xác định. Ta chỉ xét tập xác định D là một miền, vì vậy D được gọi là miền xác định.

Thông thường người ta cho hàm phức bằng công thức xác định ảnh $f(z)$, khi đó miền xác định D là tập các số phức z mà $f(z)$ có nghĩa.

Hàm số $w = f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$ có miền xác định là $D = \{z \mid z \ne \pm i\}$.

Ta có thể biểu diễn một hàm phức bởi hai hàm thực của hai biến (x, y) như sau:

$$z = x + iy \text{ và } w = f(z) = u + iv \quad \text{thì} \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \tag{1.24}$$

Gọi $u(x,y)$ là phần thực, $v(x,y)$ là phần ảo của hàm $f(z)$.

Hàm số $w = z^2 + 3 = (x+iy)^2 + 3 = (x^2 - y^2 + 3) + i2xy$ có $\begin{cases} u = x^2 - y^2 + 3 \\ v = 2xy \end{cases}$.

Trường hợp miền xác định $D \subset \mathbb{R}$ thì ta có hàm phức biến số thực, ta ký hiệu $w = f(t)$ có biến số là t thay cho z.

Trường hợp miền xác định D là tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ thì ta có dãy số phức $z_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ta thường ký hiệu dãy số là $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hay $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.

1.2.2. Giới hạn

Định nghĩa 1.2: *Dãy số* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *hội tụ về* $z_0 = x_0 + y_0$, *ký hiệu* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, *nếu*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : n \ge N \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon \tag{1.25}$$

Dãy số $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *có giới hạn là* ∞, *ký hiệu* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, *nếu*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : n \ge N \Rightarrow |z_n| > \varepsilon \tag{1.26}$$

Từ (1.17) suy ra rằng

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases} \tag{1.27}$$

Định nghĩa 1.3: *Ta nói hàm phức* $w = f(z)$ *xác định trong một lân cận của* z_0 *có giới hạn là* L *khi* z *tiến đến* z_0, *ký hiệu* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$, *nếu với mọi lân cận* $B_\varepsilon(L)$ *tồn tại lân cận* $B_\delta(z_0)$ *sao cho với mọi* $z \in B_\delta(z_0)$, $z \ne z_0$ *thì* $f(z) \in B_\varepsilon(L)$.

Trường hợp z_0, $L \in \mathbb{C}$ định nghĩa trên được viết dưới dạng cụ thể sau:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon \tag{1.28}$$

Từ (1.17), (1.24), tương tự (1.27) ta có:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{cases} \tag{1.29}$$

trong đó $z_0 = x_0 + iy_0$, $L = u_0 + iv_0$.

1.2.3. Liên tục

Định nghĩa 1.4: *Hàm phức* $w = f(z)$ *xác định trong miền chứa điểm* z_0 *được gọi là liên tục tại* z_0 *nếu* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. *Hàm phức* $w = f(z)$ *liên tục tại mọi điểm của miền* D *được gọi là liên tục trong* D.

Từ (1.29) suy ra rằng một hàm phức liên tục khi và chỉ khi hai hàm thực hai biến (phần thực, phần ảo) xác định bởi (1.24) là liên tục. Do đó ta có thể áp dụng các tính chất liên tục của hàm thực hai biến cho hàm phức.